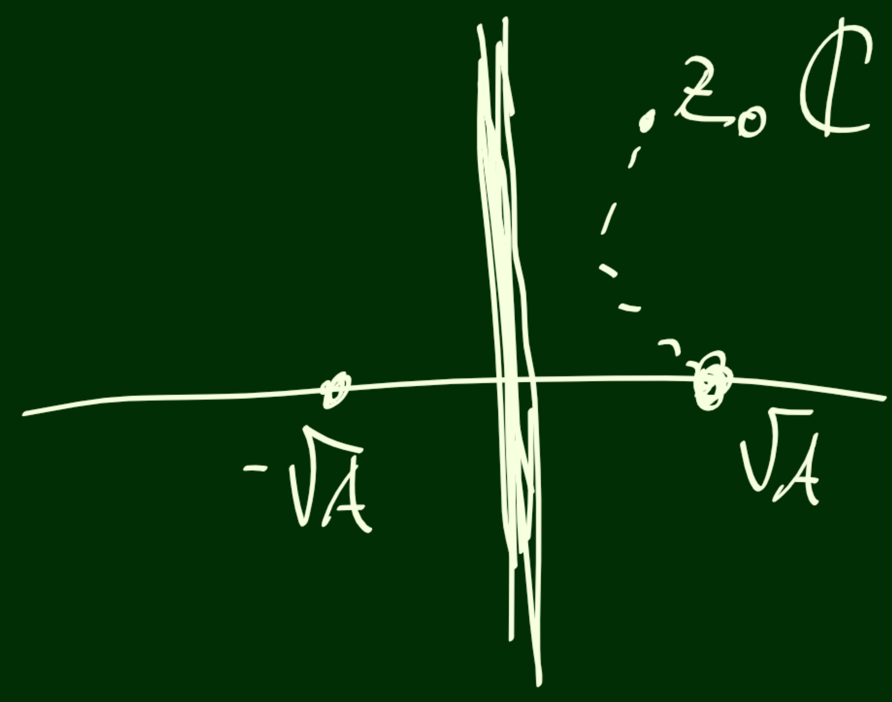
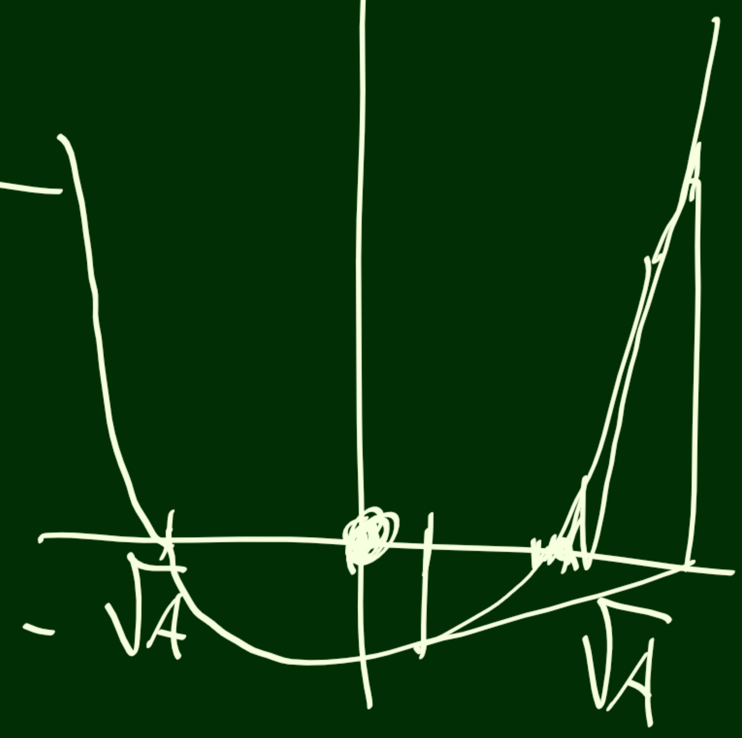
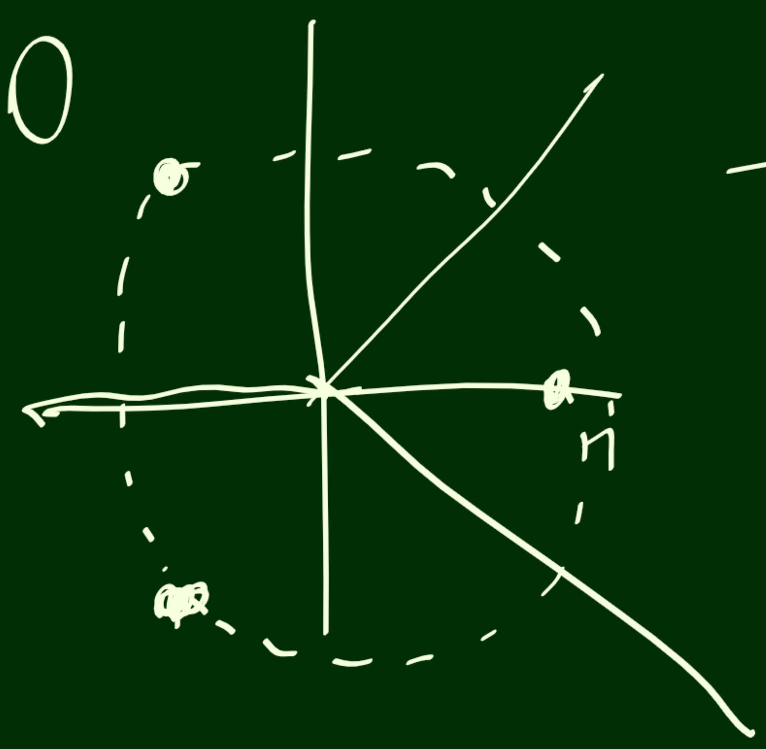
Newton v $\mathbb{C}$: $z^2 - A = 0$ $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{A}{z_n}\right)$





Cayley 1879

$x^3 - A = 0$



Zastavovací kritéria: Testuj
- konvergenci: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ – absolutní kritérium
  relativní: $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} < \varepsilon$.
- splnění rce: $|f(x_n)| < \varepsilon$ – reziduum.

Modifikace Newtona: Někdy neznám f', resp. drahé.

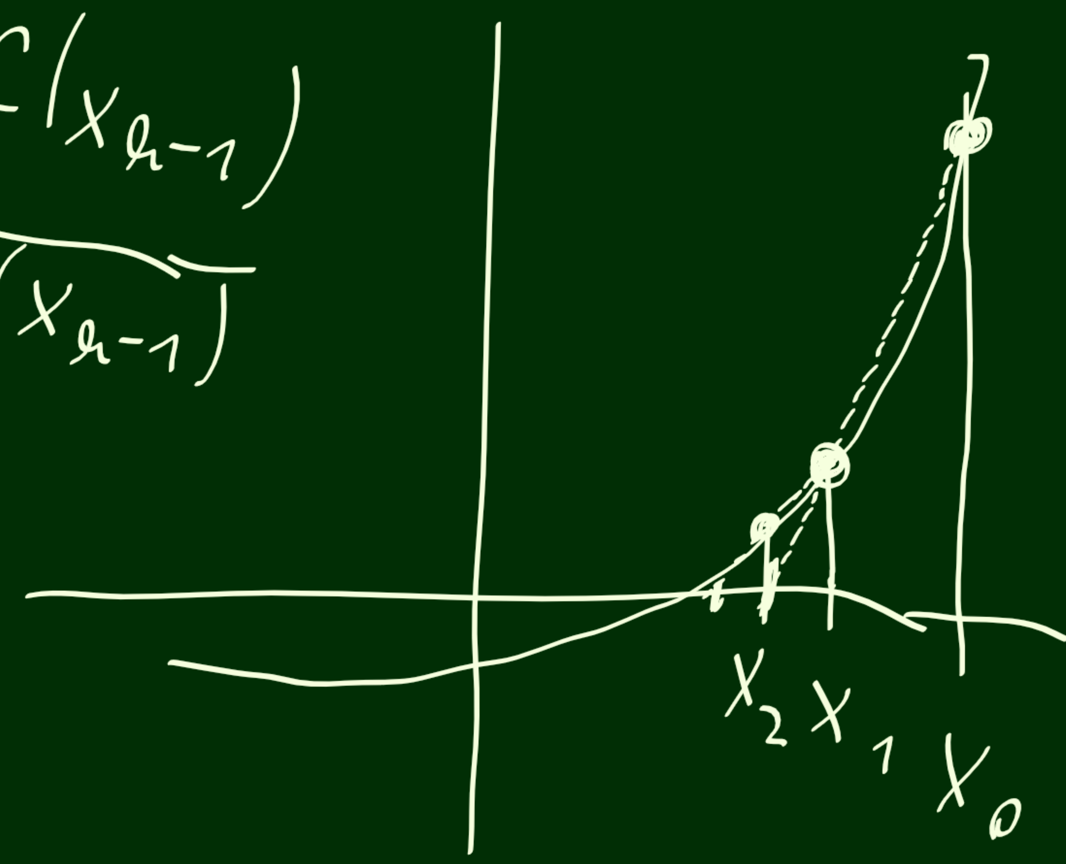
$f'(x_n) \approx d_n$.

1) diference $d_n := \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n}$ pro h_n dost. malé.
   $h_n = h$ lineární konvergence. $\lim h_n \to 0$ – superlin.

2) Metoda sečen: $d_n := \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, $h_n = x_n - x_{n-1}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{d_n} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

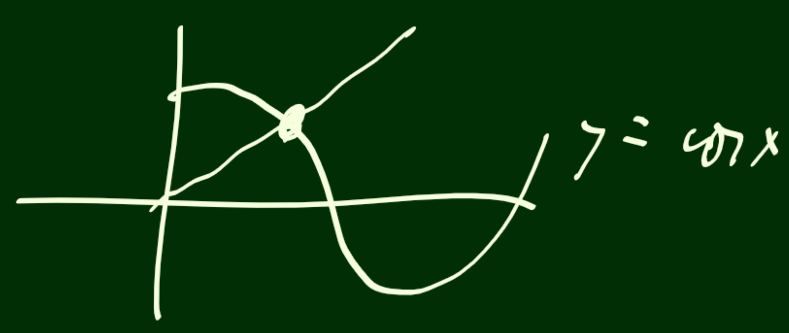
Řád $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034\ldots$



Iterace funkcí: $f(x_*)=0$ $\rightsquigarrow$ metoda $x_{n+1}=g(x_n)$, g nějak odvozené z f

Nechť $x_n \to x_*$, g spoj. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_* & = & g(x_*) \end{array}$$



Tj. x_* = kořen f = pevný bod g.

Př: Mačkání opakované cos na kalkulačce, $x_n \to 0{,}739$ – řešení rce $\boxed{\cos x = x}$

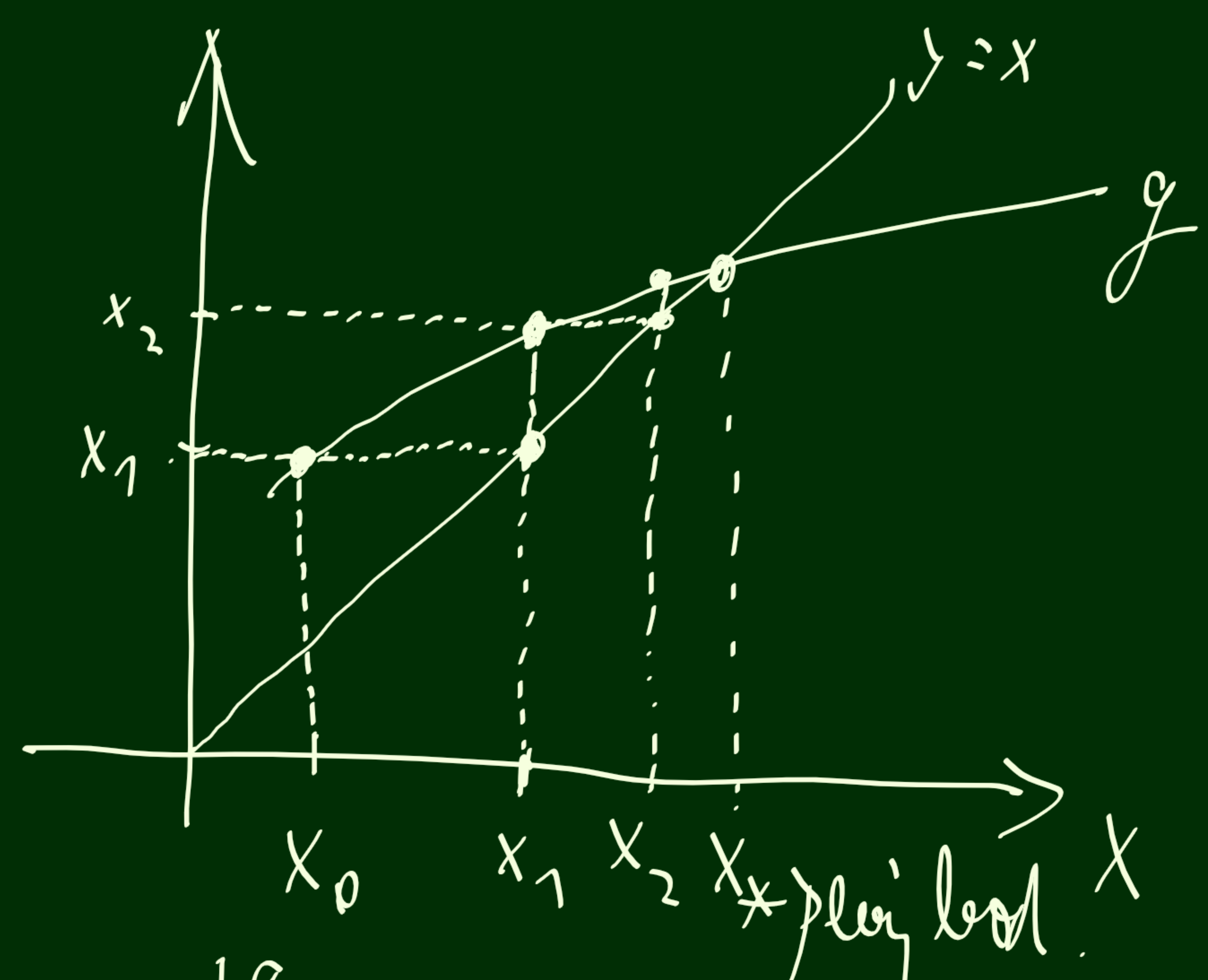
Jak získám g z f?

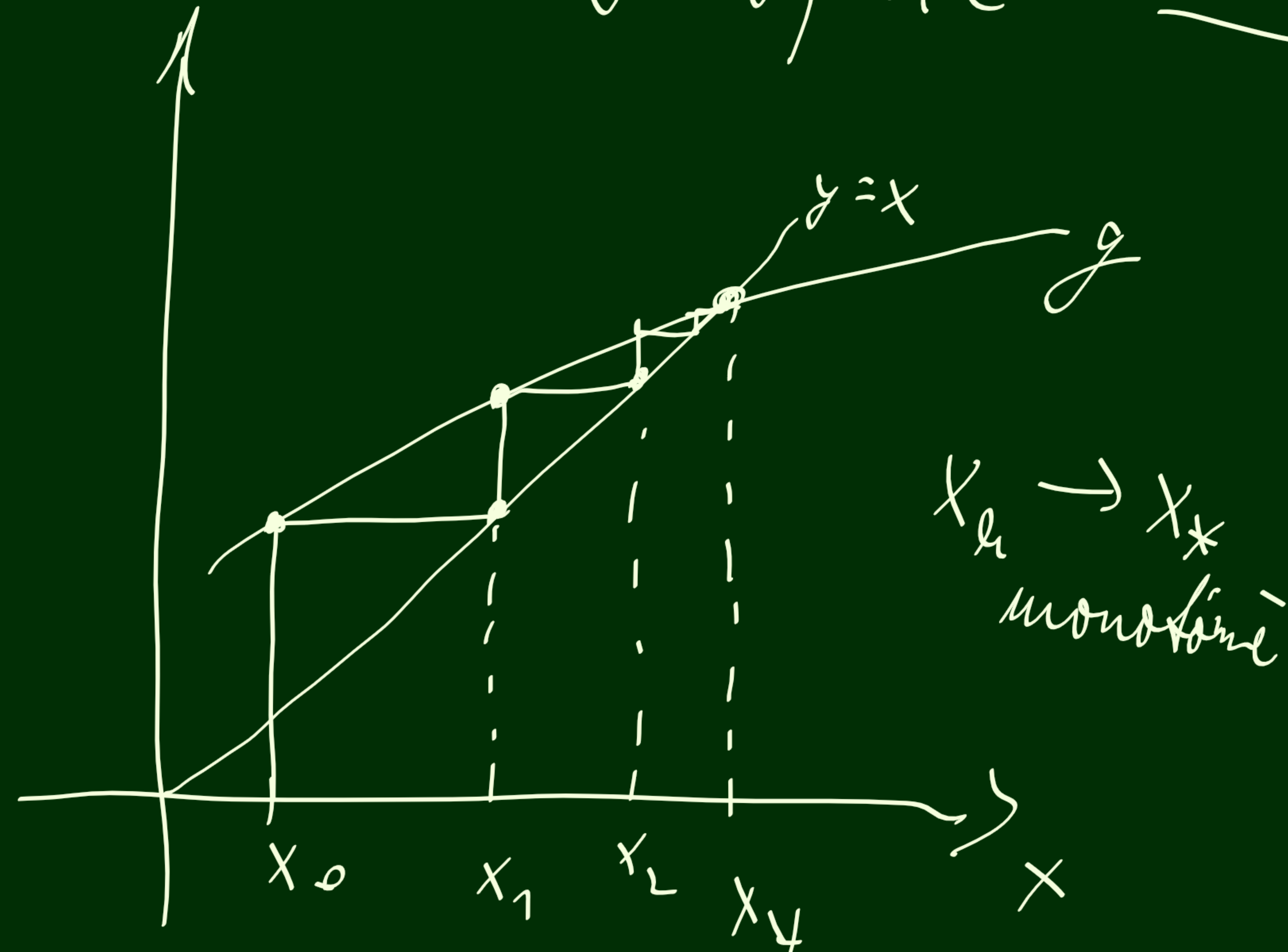
Př: $f(x)=e^x-2x-1=0$, $f(0)=0$

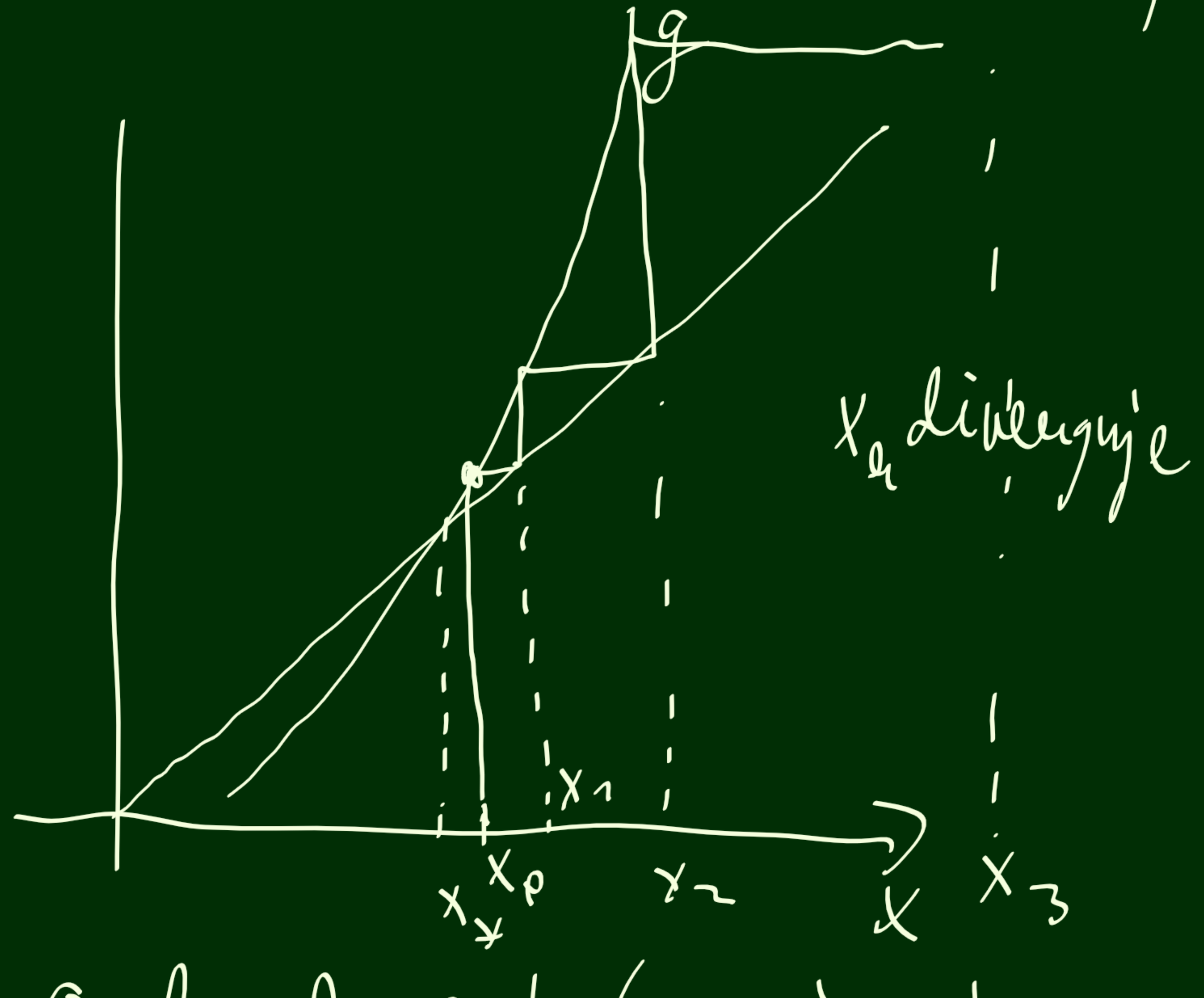
- $\exists x_* \in (1,2)$: $f(1)<0$, $f(2)>0$
- chci $f(x_*)=0$ převést na rovnici $g(x_*)=x_*$. Chci např. pro $x_0=\frac{3}{2}$, aby konvergovala $x_n \to x_*$.

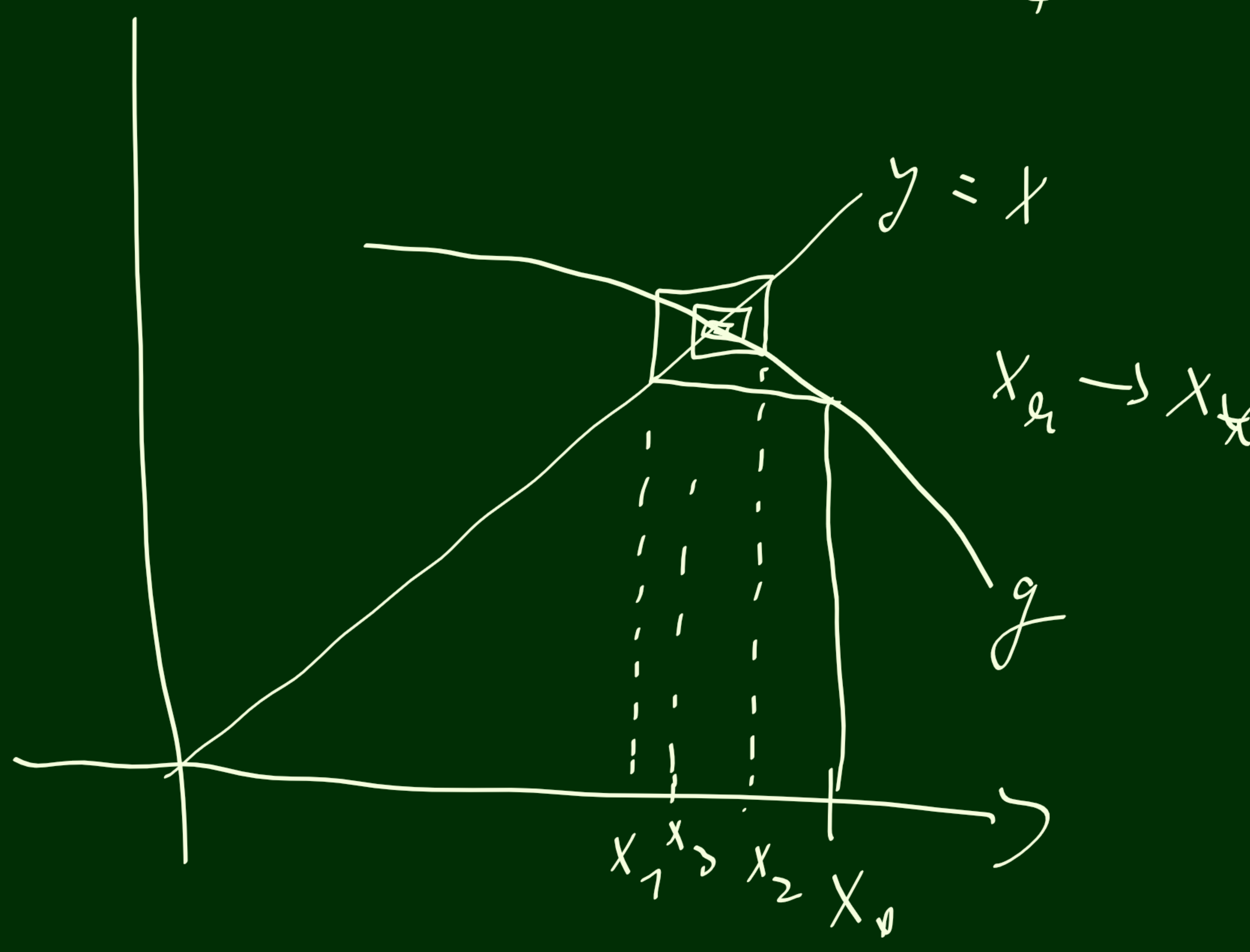
1) $e^x-x-1=x$, $g(x)=e^x-x-1$ ... ✗
2) $\ln(2x+1)=x$, $g(x)=\ln(2x+1)$ ✓ ale pomalu
3) $\dfrac{e^x-1}{2}=x$, $g(x)$ ... ✗
4) $\dfrac{xe^x-e^x+1}{e^x-2}=x$, ✓ výborné: Newton.

Grafiky:

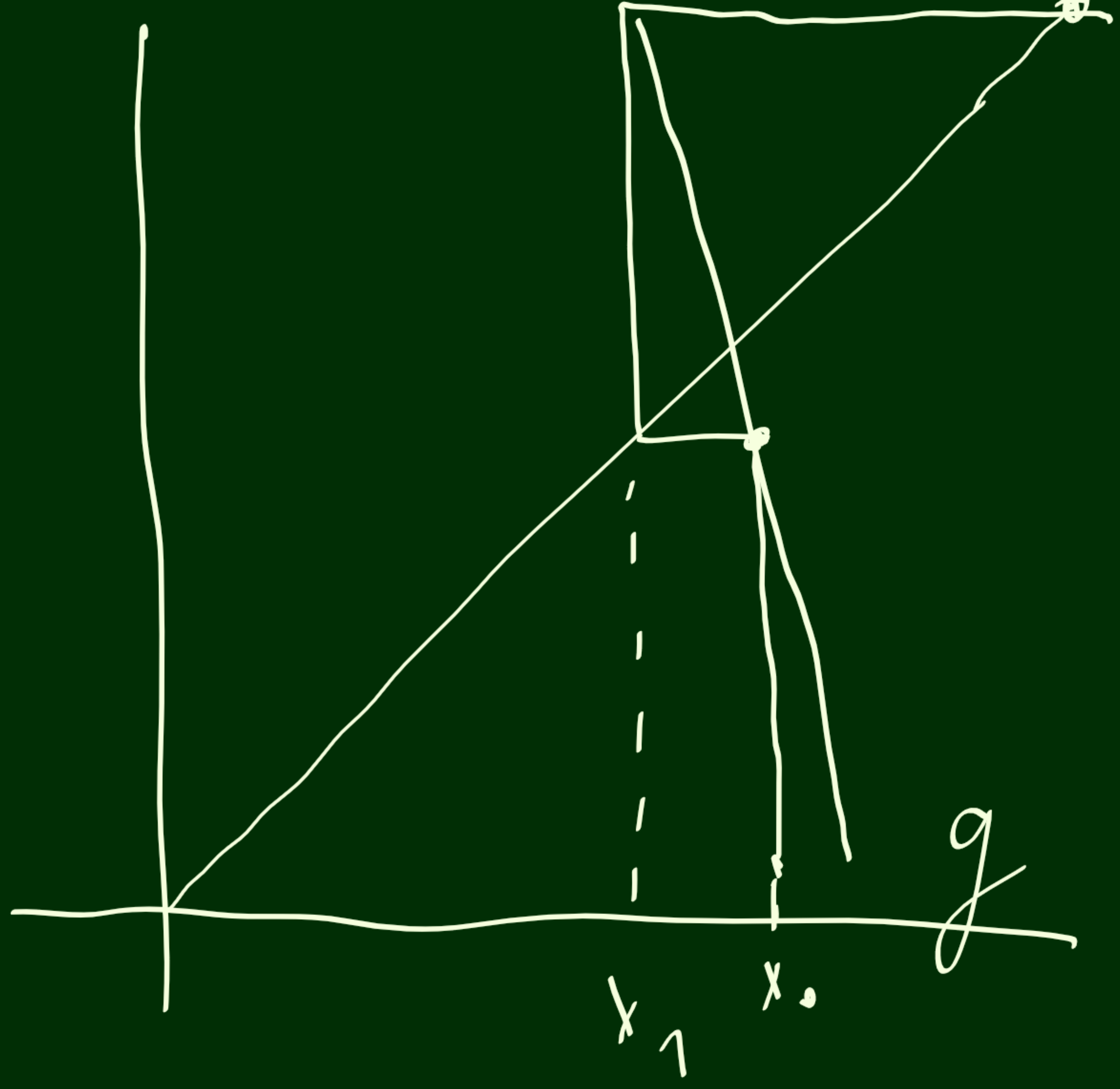








Cobweb plot (pavučinový diagram)



Pozorování: $f \in C^1$; $|g'| < 1$ na okolí x_*
$\Rightarrow x_k \to x_*$.

Def: $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ je kontrakce (kontrahující), pokud $\exists L < 1$:
$\forall x, y \in [a,b]: |g(x) - g(y)| \le L|x - y|$ (g je Lipschitzovská s $L<1$)

Věta (Banachova věta o kontrakci): Nechť $g: [a,b] \to [a,b]$ je kontrakce. Pak $\exists!$ pevný bod $x_* \in [a,b]$. Dále $\forall x_0 \in [a,b]$: $x_k \to x_*$, kde $\{x_k\}$: $x_{k+1} = g(x_k)$. Platí odhad $|x_k - x_*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \to 0$ pro $k \to \infty$.

Dk:
- $|x_k - x_{k-1}| = |g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})| \le L|\underbrace{x_{k-1}}_{g(x_{k-2})} - \underbrace{x_{k-2}}_{g(x_{k-3})}| \le \dots \le L^{k-1}|x_1 - x_0|$
- $\{x_k\}$ je Cauchyovská: $k > l$: $|x_k - x_l| \le |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \dots + |x_{l+1} - x_l| \le \underbrace{(L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + L^l)}_{L^l \sum_{i=0}^{k-l-1} L^i \le L^l \sum_{i=0}^{\infty} L^i = \frac{L^l}{1-L}}|x_1 - x_0| \le \frac{L^l}{1-L}|x_1 - x_0| \to 0$ pro $k, l \to \infty$.
- $\{x_k\}$ Cauchyovská $\Rightarrow \exists x_*: x_k \to x_*$.
- g kontrahující $\Rightarrow$ g spojitá $\Rightarrow g(x_*) = g\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \overset{g \text{ spoj.}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{g(x_k)}_{x_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x_*$.
- Cauchyovskost: $|\underset{\downarrow\, x_*}{x_k} - x_l| \le \frac{L^l}{1-L}|x_1 - x_0| \quad / \lim_{k\to\infty}$

$$|x_* - x_l| \le \frac{L^l}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Pozn: Nejvýš lineární konvergence: $|x_{k+1} - x_*| = |g(x_k) - g(x_*)| \le L|x_k - x_*|$
$\lim \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{1}} \le L$.

Pozn: $g \in C^1$: $|g'|<1$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ g kontrakce na $[a,b]$.

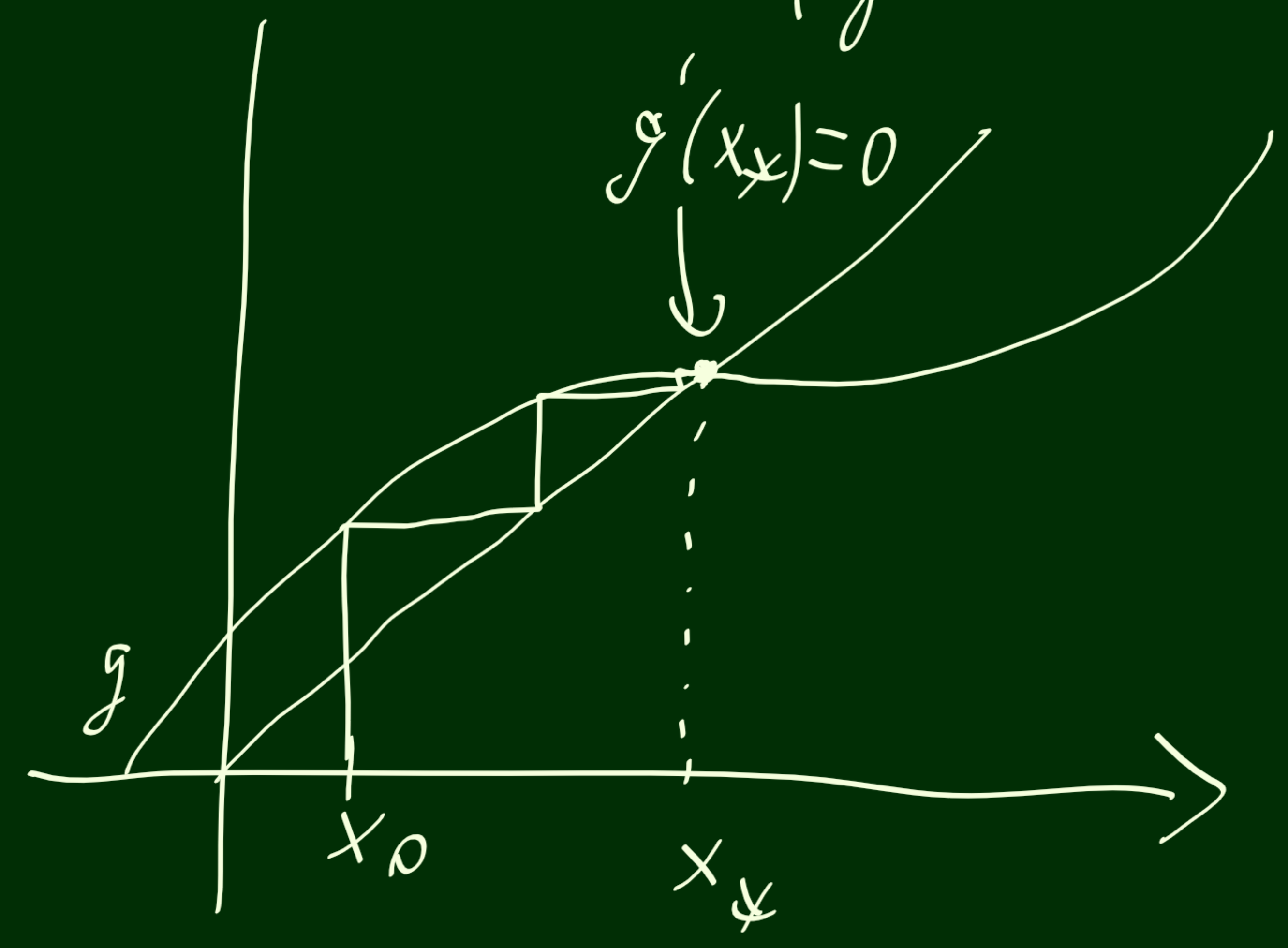
Dk: $|g(x)-g(y)| = |g'(\xi)(x-y)| \le \underbrace{\max_{z\in[a,b]} |g'(z)|}_{=:L<1} \cdot |x-y|$

Pozn: $|g'(x_*)|<1$, $g \in C^1$ $\Rightarrow$ $\exists$ okolí $U \in \mathcal{O}(x_*)$: $|g'|<1$ na U

$\Rightarrow$ $\forall x_0 \in U$ $\quad x_n \to x_*$.

Pozn: $g \in C^2$, $g'(x_*)=0$ $\Rightarrow$ kvadrat. konv.

Newton = návod, jak z dané funkce f vyrobit g: je splněno $g'(x_*)=0$



Soustavy nelin. rovnic: $F:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, $x=(x^1,x^2,\dots,x^N)$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1,\dots,x^N) \\ \vdots \\ f^N(x^1,\dots,x^N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Složitější
- výpočetní náklady rostou s N.
- Pro simulace – parciální diferenciální rovnice $N \sim 10^6$.

Newtonova metoda: v $\mathbb{R}$: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

v $\mathbb{R}^N$: $0 = F(x_*) \approx F(x_0) + J_F(x_0)(x_* - x_0) + \cancel{R}$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - [J_F(x_n)]^{-1} F(x_n)$$